රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

13 ශ්‍රේණිය - උපකාරක පරීක්ෂණය - 2021 දෙසැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය II

කාලය ඃ පැය 2

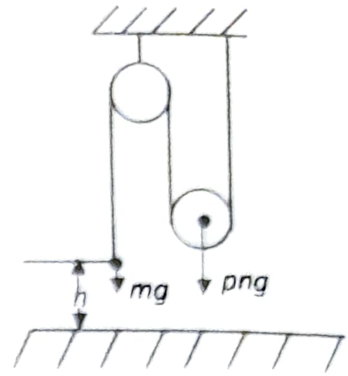
A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

01. ස්කන්ධය m බැගින් වූ A හා B අංශු දෙකක් පිලිවෙලින් $3u$ හා u ප්‍රවේග වලින් සුමට තිරස් තලයක් මත එකම දිශාවට සරල රේඛාවක චලනය වී එකිනෙක ගැටේ. ගැටුමින් පසු අංශුවල ප්‍රවේග එම දිශාවටම පිළිවෙලින් u හා λu නම්, ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගතික සංගුණකය 1 බව පෙන්වන්න. මෙහි යනු λ නියතයකි.

02. අංශුවක් තිරස් පොළොවේ O ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට θ කෝණයක් ආනතව, u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපනය කරනු ලැබේ. උපරිම උසේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය v වේ. ප්‍රක්ෂේප දිශාවට ලම්බ දිශාවකට අංශුව චලනය වන විට එහි ප්‍රවේගය w නම්, $\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}=\frac{1}{v^2}$ බව පෙන්වන්න.

03. ස්කන්ධය pm වන සචල කප්පියක් හා අචල කප්පියක් තුළින් යන අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන ලී කුට්ටියකටද ගැට ගසා ඇත. ආරම්භයේදී ලී කුට්ටිය පොළොව මට්ටමේ සිට සිරස්ව h උසකින් අල්වා තබා, තන්තුව නොබුරුල්ව, නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරී ලී කුට්ටිය තිරස් පොළොවේ වදින ප්‍රවේගය $\frac{\sqrt{5gh}}{2}$ නම් P සොයන්න.



04. O, A සහ B යනු $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ සහ $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ වන පරිදි ඒක රේඛීය නොවූ ලක්ෂ්‍ය 3 කි. C යනු $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. P ලක්ෂ්‍යය, BC රේඛාව අභ්‍යන්තරයෙන් $2:1$ අනුපාතයට බෙදෙයි නම් $\overrightarrow{OP} = \frac{2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

05. බර W වන රථයක් තිරස්ව යෙදෙන අතිරේක kW බලයක් නිසා u උපරිම ප්‍රවේගයෙන් තිරස්ව ගමන් කරයි. එන්ජිමේ උපරිම ජවය සඳහා අගයක් ලබාගන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. පෙර ප්‍රතිරෝදි බලයම ක්‍රියාත්මක වන විට රථය $\frac{2u}{3}$ උපරිම වේගයෙන්, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ක් ආනතියක් සහිත ආනත තලයක ඉහළට ගමන් කරයි නම් $k=\frac{1}{5}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

06. බර W බැගින් හා සමාන දිගින් යුත් AB, AC දඬු දෙකක් B හිදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A හා C කෙලවර රළු තිරස් තලයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයෙන් පවතී. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමඟ 60^0ක කෝණයක් සාදයි නම් B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

07. රළු සිරස් බිත්තියක ස්පර්ශ වන පරිදි අංශුවක් රඳවා ඇත්තේ, යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදමින් බිත්තියට ලම්බවූ සිරස් තලයක පවතින P බලයක් මගිනි. අංශුවත් බිත්තියත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ.

පහත අවශ්‍යතා තෘප්ත කරන පරිදි P හි අගය μ, m, g හා θ ඇසුරින් සොයන්න.

i. අංශුව සිරස්ව පහළට ලිස්සීමට ආසන්න මොහොතේ ඇතිවිට

ii. අංශුව සිරස්ව ඉහළට ලිස්සීම ආසන්න මොහොතේ ඇතිවිට

iii. $\mu = \frac{3}{4}$ හා $\theta = 45^0$ වන විට අංශුව සමතුලිතව පවතී නම් $k_1 mg \le P \le k_2 mg$ බව පෙන්වන්න. මෙහි k_1 හා k_2 යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

08. A සහ B යනු ස්වායත්ත සිද්ධීන් වන විට $P(A) = 0.2$ හා $P(A \cup B) = 0.6$ වේ. $P(B)$ සොයන්න. තවද $P\left(\frac{A}{B'}\right)$ හා $P\left(\frac{B'}{A'}\right)$ සොයන්න.

09. පළමු ධන නිඛිල n හි විචලතාව $\frac{n^2-1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

10. පහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මාත අගය 15 බව දී ඇත. මාත පංතියේ සංඛ්‍යාතය සොයන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
0-9	11
9-18	...
18-27	16
27-36	12

B කොටස

ප්‍රශ්න තුනකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.a. A හා B යන එන්ජින් දෙකක් සමාන්තර මාර්ග දෙකක එකම දිශාවකට ගමන් කරන්නේ f හා $\frac{3f}{2}$ නියත ත්වරණ වලිනි. එන්ජින් දෙකක p ලක්ෂ්‍යය පසු කරන්නේ එකම වේලාවකදී පිළිවෙලින් u හා $\frac{u}{2}$ ප්‍රවේග සහිතවය. නැවතත් ඔවුන් Q ලක්ෂ්‍යය පසු කරන්නේ එකම වේලාවේදී වන අතර ඔවුන් නියත මන්දන පිලවෙලින් f හා F වලින් ගමන්කර ඊළඟ නැවතුමේදී නිශ්චලතාවයට පත්වේ.

එන්ජින් දෙකේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාර එකම බණ්ඩාංක තලයක අඳින්න.

i. B එන්ජිමට A එන්ජිමට මගින් ඇතිකල හැකි උපරිම පරතරය $\frac{u^2}{4f}$ බව පෙන්වන්න.

ii. Q හි දී A හා B ගේ වෙන වෙනම ප්‍රවේග සොයන්න.

iii. P හා Q අතර දුර සොයන්න.

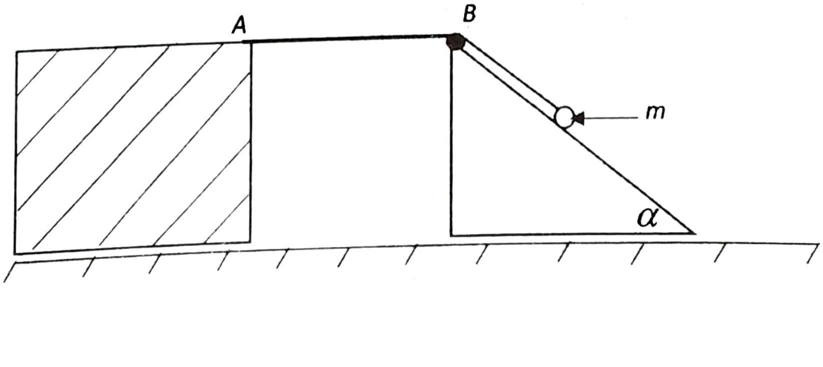
iv. $f : F = 49 : 36$ බව පෙන්වන්න.

b. P හා Q ගුවන්යානා එකම තිරස් මට්ටමක පියාසර කරන්නේ P යානය 300kmh^{-1} ප්‍රවේගයෙන් **නිරිත දිශාවට** හා Q යානය **වයඹ දිශාවට** වේ. Q යානය, P යානයෙන් $5\sqrt{2}km$ දකුණින් පිහිටන අවස්ථාවේදී යානා දෙක ගැටීමට නියමිත බව නියමුවන් විසින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ.

i. Q හි වේගය සොයන්න.

ii. තව එක් මිනිත්තුවකින් ගුවන්යානා දෙක ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

12.a. ස්කන්ධය M වූ හරස්කඩ සමචතුරස්‍රාකාර වන සුමට ලී කොටයක්, සුමට තිරස් තලයක් මත ඇත්තේ එහි A ලක්ෂ්‍යයට ඇඳූ අවිතන්‍ය තන්තුව සුමට තිරස් තලය මත වන ස්කන්ධය m_1 වූ කුඤ්ඤය මුදුනේ පිහිටි B සුමට කප්පිය මතින් යවා කුඤ්ඤයේ තිරසට α ආනත තලය මත වූ ස්කන්ධය m වූ අංශුවට ගැටගසා, නිශ්චලතාවයේ පවතින පරිදිය. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදාහල විට චලිත වන එක් එක් වස්තුන්ගේ ත්වරණ හා තන්තුවේ ආතතිය ලබාගැනීමට අවශ්‍ය සමීකරණ ලියන්න.



$M = m_1 = m$ නම්, ත්වරණ හා ආතතිය සොයන්න. කුඤ්ඤය හා අංශුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව, $\left\{\dfrac{\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1}{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 5}\right\} mg$ බව පෙන්වන්න.

b. O අචල ලක්ෂ්‍යයකට කෙලවරක් ගැටගසන ලද දිග a වූ ලුහු, අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙලවරට ගැටගසන ලද ස්කන්ධය m වූ A අංශුවක් නිදහසේ සිරස්ව එල්ලෙමින් පවතී. $\sqrt{nga}$ තිරස් ප්‍රවේගයක් අංශුවට ලබාදුන් විට, $n \geq 5$ නම් අංශුව සම්පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යන බව පෙන්වන්න.

තන්තුව තිරස් වන විට A අංශුව තවත් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සමඟ ගැටී හා වෙයි නම්, සංයුක්තයට සම්පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවායාම සඳහා n ට තිබිය යුතු අවම අගය සොයන්න.

13. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන ලුහු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක දෙකෙලවරට ස්කන්ධ පිළිවෙලින් M හා m වන A හා B අංශු දෙකක් ඈඳා තන්තුව ඇදී පවතින සේ රළු තිරස් මේසයක් මත නිසලව තබා ඇත. මේසය හා එක් එක් අංශුව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{1}{2}$ වේ. B අංශුවට A ගෙන් ඉවතට මේසය දිගේ $\sqrt{ga}$ ප්‍රවේගයක් ලබාදුන් විට, A අංශුව නිසලව පවතී යැයි උපකල්පනය කර, තන්තුවේ විතතිය x වන විට B අංශුවේ චලිතය $\ddot{x} = \dfrac{-2g}{a}\left(x + \dfrac{a}{4}\right)$ සමීකරණය මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයට $x + \dfrac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් පවතී යැයි උපකල්පනය කර, α, β හා ω සොයන්න. එමඟින්, තන්තුවේ උපරිම විතතිය $\dfrac{a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$M \geq 2m$ වන බවද පෙන්වන්න.

B අංශුවේ ආපසු චලිතය $\ddot{y} = \dfrac{-2g}{a}\left(y - \dfrac{a}{4}\right)$ සමීකරණය මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙහි y යනු තන්තුවේ විතතියයි. මෙම සමීකරණයේ විසඳුම $y = \dfrac{a}{4}\left[1 + \cos\sqrt{\dfrac{2g}{a}}t\right]$ යැයි උපකල්පනය කර, $\left[\pi + \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ කාලකයට පසු B අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ, නියත වශයෙන්ම නිසලතාවයට පත්වන බව පෙන්වන්න.

14.a.i. LM සරල රේඛා X මඟින් අභ්‍යන්තරව, $LX : XM = \alpha : \beta$ යන අනුපාතයට බෙදයි නම් X හි පිහිටුම් දෛශිකය වන $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha\mathbf{m} + \beta l}{\alpha + \beta}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\mathbf{m}$ හා l යනු පිළිවෙලින් M හා L හි පිහිටුම් දෛශික වේ.

07. රළු සිරස් බිත්තියක ස්පර්ශ වන පරිදි අංශුවක් රඳවා ඇත්තේ, යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදමින් බිත්තියට ලම්බවූ සිරස් තලයක පවතින P බලයක් මගිනි. අංශුවත් බිත්තියත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ.

පහත අවශ්‍යතා තෘප්ත කරන පරිදි P හි අගය μ, m, g හා θ ඇසුරින් සොයන්න.

i. අංශුව සිරස්ව පහළට ලිස්සීමට ආසන්න මොහොතේ ඇතිවිට

ii. අංශුව සිරස්ව ඉහළට ලිස්සීම ආසන්න මොහොතේ ඇතිවිට

iii. $\mu = \frac{3}{4}$ හා $\theta = 45^0$ වන විට අංශුව සමතුලිතව පවතී නම් $k_1 mg \leq P \leq k_2 mg$ බව පෙන්වන්න. මෙහි k_1 හා k_2 යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

08. A සහ B යනු ස්වායත්ත සිද්ධීන් වන විට $P(A) = 0.2$ හා $P(A \cup B) = 0.6$ වේ. $P(B)$ සොයන්න. තවද $P\left(\frac{A}{B'}\right)$ හා $P\left(\frac{B'}{A'}\right)$ සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

05. බර W වන රථයක් තිරස්ව යෙදෙන අතිරේක kW බලයක් නිසා u උපරිම ප්‍රවේගයෙන් තිරස්ව ගමන් කරයි. එන්ජිමේ උපරිම ජවය සඳහා අගයක් ලබාගන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. පෙර ප්‍රතිරෝධී බලයම ක්‍රියාත්මක වන විට රථය $\frac{2u}{3}$ උපරිම වේගයෙන්, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ක් ආනතියක් සහිත ආනත තලයක ඉහළට ගමන් කරයි නම් $k=\frac{1}{5}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

06. බර W බැගින් හා සමාන දිගින් යුත් AB, AC දඬු දෙකක් B හිදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A හා C කෙළවර රළු තිරස් තලයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයෙන් පවතී. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමඟ 60^0ක කෝණයක් සාදයි නම් B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

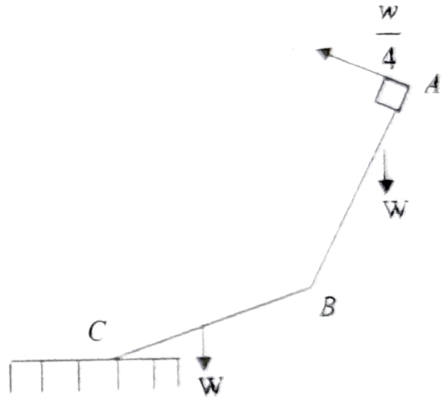
....

....

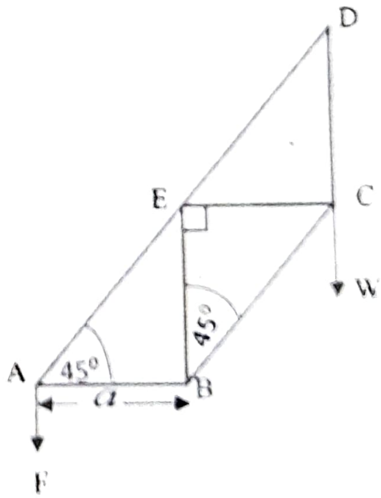
ii. O මූලය අනුබද්ධයෙන් A, B හා P ලක්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා $\frac{\mathbf{b}}{3}$ වෙයි. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ අසමාන්තර වේ. OA හා OB පාද වල මධ්‍ය ලක්ෂ පිළිවෙලින් E හා F වේ. AP හා EF , L හිදි ඡේදනය වේ. $2\mathbf{f} + 4\mathbf{e} = 3\mathbf{a} + 3\mathbf{p}$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හා (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් L හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{6}$ බව පෙන්වා $\frac{AL}{AP}$ හා $\frac{EL}{EF}$ සොයන්න.

b. ඒකතල බල පද්ධතියක $(2a, 0)$ හා $(0, a)$ ලක්ෂ්‍ය වටා වාමාවර්තව ඝූර්ණ පිළිවෙලින් H හා $2H$ වෙයි. තවද බල පද්ධතියෙන් $y = x$ රේඛාවට සමාන්තරව කිසිදු බලපෑමක් නොමැත. බල පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය $\sqrt{2}\frac{H}{a}$ බවත් එහි ක්‍රියා රේඛාව මගින් x හා y අක්ෂ ඡේදනය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යවල කණ්ඩාංක සොයන්න.

15.a. දිග $2a$ හා බර w වූ **AB** හා **BC** ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී සුමටව සන්ධි කර A හි දී **AB** ලම්භකව $\frac{w}{4}$ බලයක් යෙදීමෙන් සමතුලිතව තබා ඇත. C යනු අචල තිරස් තලයක් මත ඇති ලක්ෂ්‍යයකි. **AB** හා **BC** දඬු තිරස සමඟ සාදන කෝණ සොයා, B සන්ධියේ තිරස් සහ සිරස් ප්‍රතික්‍රියාද සොයන්න.



b. කෙළවර වලින් සුමටව සන්ධිකරන ලද හා සැහැල්ලු දඬු හතකින් යුත් රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. C හි දී W භාරයක් එල්ලා ඇති අතර A හි F දී සිරස් බලයක් යෙදා ඇත. B හි දී සුමට ආධාරකයක් මත රඳවන ලදුව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිත තාවයේ පවතී. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් සැකිල්ලේ එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යබල, ආතති, තෙරපුම් වශයෙන් දක්වමින් සොයන්න. B හි දී ආධාරකයෙන් සැකිල්ල මත ප්‍රතික්‍රියාව ගණනය කරන්න.



16.i. උස h වූ ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි ශිර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ii. පතුල් අරය r හා උස h වූ ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝණ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයකින් , සෘජු වෘත්ත කේතුවක් හාරා ඉවත් කර ඇත්තේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ ආධාරකය සමඟ සමපාත වන පරිදි හා කේතුවේ ශීර්ෂය O, සිලින්ඩරයෙහි අනෙක් ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය වන පරිදි වේ. ශේෂ වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3h}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ශේෂ වස්තුව O ඉහලින් පිහිටන පරිදි ආධාරක පරිධියේ ලක්‍ෂ්‍යයක් තිරස් තලයක් මත තබා වස්තුව ක්‍රමයෙන් ඇලකරනු ලැබේ. වස්තුව ලිස්සා නොයෑමට ප්‍රමාණවත් ඝර්ෂණ බලයක් පවතී නම් අක්ෂයේ ආනතිය $\tan^{-1}\left(\frac{8r}{5h}\right)$ ඉක්මවන විට වස්තුව පෙරළී යන බව පෙන්වන්න. එම ශේෂ වස්තුවේ O හා සමපාත වන පරිදි අරය r වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක් සවිකරනු ලැබේ. අර්ධගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සමග ගැටෙමින් සංයුක්තයට තිරස් තලයක් මත සමතුලිතව පැවතිය හැකිනම්, අර්ධගෝලය සෑදූ ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය බව $\frac{h^2}{r^2}\rho$ පෙන්වන්න.

17.a. එක්තරා පුද්ගලයෙකුට කුලී රථයක් ලබා ගැනීමට අවශ්‍ය වූ විට ඔහු ඒ සඳහා x, y, z ස්ථාන තුනක සේවය ලබාගනී. ඔහු x වලින් කුලී රථයක් ලබා ගැනීමේ සම්භාවිතාව 40%ක් ද y සඳහා එය 50%ක්ද z සඳහා එය 10%ක් ද වෙයි. x වලින් සපයන කුලී රථයක් ප්‍රමාද වී පැමිණිමේ සම්භාවිතාව 9%ක්ද y හා z සඳහා අනුපිළිවෙලින් 6% ක් හා 20% ක්ද වේ. ඔහු ඊළඟට ලබාගන්නා කුලී රථය,

i.. x වලින් පැමිණෙන සහ අප්‍රමාදව පැමිණිමේ,

ii. ප්‍රමාද වී පැමිණීමේ,

iii. ප්‍රමාද වී පැමිණෙන බව දී ඇත්නම් එය y වලින් පැමිණෙන කුලී රථයක් වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

b. විභාගයකට පෙනී සිටි සිසුන් 80 දෙනෙකුගේ ලකුණුවල ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ.

ලකුණු	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව	5	10	15	30	10	5	5

i. මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න.

ii. මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

iii. උත්තර පත්‍ර නැවත ඇගයීමේදී 40-49 ලකුණු ලැබූ සිසුන්ගෙන් 5 දෙනෙකු 50-59 ලකුණු ලබාගත් අතර, තවත් සිසුන් 5 දෙනෙකු 60-69 ලකුණු ලබාගත්හ. නව මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය අපෝහනය කරන්න.